Théorème

Quel que soit le nombre réel x, quel que soit le nombre réel strictement positif t,

i)
$$\ln\left(e^x\right) = x$$

ii)
$$e^{\ln(t)} = t$$

iii)
$$x = \ln(t) \iff t = e^x$$

■ Preuve

i) Montrons que, quel que soit le nombre réel x,

$$\ln\left(e^x\right) = x.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^x\right) - x.$$

Il s'agit de montrer que, quel que soit le nombre réel x,

$$f(x) = 0.$$

Pour cela, montrons que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = C$$

puis montrons

$$C = 0.$$

La fonction f, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, est constante sur $\mathbb{R}$, si et seulement si la fonction dérivée $f^{'}$ est nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui résulte des égalités suivantes.

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \left(\ln\left(e^x\right) - x\right)^{'} \\ &= \left(\ln\left(e^x\right)\right)^{'} - x^{'} \\ &= \frac{\left(e^x\right)^{'}}{e^x} - 1 \text{ car } \left(\ln(u)\right)^{'} = \frac{u^{'}}{u} \\ &= \frac{e^x}{e^x} - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque la fonction dérivée $f^{'}$ est nulle sur $\mathbb{R}$, il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = C$$

et en particulier

$$C = f(0) = \ln(e^0) - 0 = \ln(1) = 0.$$

ii) Montrons que, quel que soit le nombre réel t strictement positif,

$$e^{\ln(t)} = t.$$

Sachant que quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs,

$$a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$$

on obtient

$$\begin{aligned} e^{\ln(t)} = t &\iff \ln\left(e^{\ln(t)}\right) = \ln(t) \\ &\iff \ln\left(e^x\right) = x \quad \text{en posant } x = \ln(t) \end{aligned}$$

or l'égalité $\ln\left(e^x\right) = x$ est vraie d'après i).

iii) Montrons que, quel que soit le nombre réel x, quel que soit le nombre réel strictement positif t,

$$x = \ln(t) \iff t = \mathrm{e}^x.$$

Utilisons à nouveau que, quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs,

$$a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$$

de la manière suivante.

$$\begin{aligned} t = \mathrm{e}^x &\iff \ln(t) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) \\ &\iff \ln(t) = x \quad \text{avec i)} \end{aligned}$$

Exemples

a) $\ln(t) = 3 \iff t = e^3$

b) $\ln(t) = -2 \iff t = e^{-2}$

c) $e^x = 5 \iff x = \ln(5)$